

Varianta 028

Subiectul I

- a) Fie P mijlocul lui [MN]; atunci $x_p = -\frac{1}{2}; y_p = \frac{3}{2}$
- b) Fie $d_1 : 2x - y + 5 = 0$ si $d_2 : 2x - y - 7 = 0$; evident $m_1 = 2 = m_2 \Rightarrow d_1 \parallel d_2$
- c) Fie $b = 3, c = 4, a = 5$ atunci $h_a = \frac{2\sigma[ABC]}{a} = \frac{b \cdot c}{a} = \frac{12}{5}$
- d) $z = 12 - 8i \Rightarrow \text{Real } z = 12$
- e) $(1 - i)^4 = 4i^2 = -4$
- f) $3\sin\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

Subiectul II

1.

a) $f(1) = 1 + 5 - 7 + 1 = 0$

b) Probabilitatea ceruta este $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c) $T_4 = (-2) \cdot 3^3 = -54$

d) $\Delta_x = -7$ si solutiile sunt $x_1 = \frac{1-7i}{4}; x_2 = \frac{1+7i}{4}$

3) Determinantul e nul având o coloană nulă

2.

a) $f'(x) = \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \frac{1}{4}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2x \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4} = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală catre $+\infty$

e) $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ deoarece f este impară

Subiectul III

a) $I_2^2 = I_2 \Rightarrow I_2 \in G$

b) $P^2 = I_2$ si $Q^2 = I_2 \Rightarrow P, Q \in G$

c) $\det P = -1$

$$d) P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) (P \cdot Q)^2 \neq I_2 \Rightarrow P \cdot Q \in G$$

$$f) A_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow A_n \in G$$

$$g) \text{Aplic f) și obțin } A_n \in G (\forall) n \in \mathbf{N}$$

Subiectul IV

$$a) f'(x) = 2x - 1$$

$$b) f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) + 1 = x^2 + x + 1 (\forall) x \in \mathbf{R}$$

$$c) \frac{x^3+1}{x^3-1} = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{f(x)}{f(x+1)} (\forall) x > 1$$

$$d) a_2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 7} = \frac{9}{7} \text{ da; presupun } a_n = \frac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)} \text{ și am } a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3-1} =$$

$$= \frac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)} \cdot \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3-1} = \frac{3(n+1)(n+2)}{2[(n+1)^2+(n+1)+1]} \text{ și propoziția este demonstrată}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)} = \frac{3}{2}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^n f(x) dx}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^n}{n^3} = \frac{1}{3}$$

$$g) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \cdot a_n \right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} - 1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{n+1}{n^2+n+1} \cdot \frac{1}{n} \right)} = e^0 = 1$$